Mathematische Facharbeiten

Rüdeger Baumann

Unter einer mathematischen Facharbeit ist die Dokumentation einer mathematischen Projektaufgabe zu verstehen. Es werden Vorschläge zu Themenwahl, Aufgabenformulierung und Gliederung solcher Facharbeiten gemacht und vier Themenbeispiele vorgestellt.

Das Ziel der Arbeit in der gymnasialen Oberstufe läßt sich (gemäß einer Vereinbarung der Kultusministerkonferenz vom 28. 2. 1997) mit den Begriffen *vertiefte Allgemeinbildung*, *allgemeine Studierfähigkeit* und *Wissenschaftspropädeutik* umschreiben. Unter diesem Aspekt soll der Leistungskurs in der gymnasialen Oberstufe der allgemeinen Studien- und Berufsvorbereitung dienen und exemplarisch in wissenschaftliche Fragestellungen, Methoden und Reflexionen einführen. Er ist auf eine systematische Beschäftigung mit wesentlichen, die Komplexität des Fachgebiets verdeutlichenden Theorien, Modellen und Methoden gerichtet. Im Leistungskurs sollen die Schüler Gelegenheit bekommen, über einen längeren Zeitraum selbständig zu arbeiten, dabei eine umfangreiche und komplexe Aufgabe bewältigen und ihre Tätigkeit in einer *Facharbeit* dokumentieren.

Aufgrund dessen hat die Kultusministerkonferenz der Facharbeit seit längerem einen bedeutenden Stellenwert eingeräumt. Nach geltender Vereinbarung kann eine Facharbeit an die Stelle der Leistungsbewertungen in den beiden Leistungsfächern im letzten Halbjahr der Kursstufe treten und in die Gesamtqualifikation für das Abitur eingebracht werden. In Niedesachsen ist die Facharbeit als eine für alle Schülerinnen und Schüler obligatorische Leistung eingeführt worden. Sie wird in einem Leistungsfach erbracht und muß sich daher an den Lernzielen, den Kursinhalten und dem Anforderungsniveau des betreffenden Leistungsfaches orientieren. Die Schüler sollen nachweisen, daß sie in Form einer schriftlichen Arbeit ein auf ein begrenztes Gebiet bezogenes Thema innerhalb eines vorgegebenen Zeitraums mit Hilfe von wissenschaftsbezogenen Fragestellungen und Arbeitstechniken selbständig bearbeiten können.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an einem Aufsatz im nichtamtlichen Teil des Schulverwaltungsblatts für Niedersachsen (Bade u. a. 1998) und suchen diese für das Fach Mathematik zu spezifizieren und an Beispielen zu erläutern. Es heißt dort:

> „Im Fach Mathematik werden in Klausuren im allgemeinen gegliederte, auf einen Themenkomplex beschränkte Aufgaben mit konkreten Arbeitsaufträgen gestellt. (...) Die Facharbeit hingegen zielt auf eine eigenständigere Schülerleistung. Es sollten deshalb komplexere, offenere Problemstellungen zu erarbeiten sein, die nicht nur kalkülmäßig zu erfassen sind. Mathematische Software kann hier wertvolle Hilfe leisten und wird ggf. auch in einer Facharbeit einsetzbar sein“ (Bade a. a. O., S. 28).

Die Suche nach geeigneten Themen mit „komplexeren, offeneren Problemstellungen“ ist schwierig und zeitaufwendig. Während es für Klausur- und Abituraufgaben bewährte Sammlungen gibt und – z. B. auch in dieser Zeitschrift – immer wieder geeignete Beispiele publiziert werden, liegt im Fall der Facharbeiten noch fast nichts vor. Einen ersten Versuch in dieser Richtung machen Steinberg und Ebenhöh (1998). Zu erwähnen sind auch die Bemühungen von

Herget und Scholz um „die etwas andere Aufgabe“ (1998). Die Begleitung und Bewertung der Arbeiten erfordert einen Aufwand, der weit über das gewohnte Maß des Oberstufenunterrichts hinausgeht; außerdem herrscht Unsicherheit hinsichtlich der Anforderungen: „Aus der Schulpraxis ist mir bekannt, daß viele Kollegen Umfang und Niveau einer solchen Belegarbeit [sprich: Facharbeit] im Fach Mathematik der Sekundarstufe II nur schwer einschätzen können“ (Grunert 1998, S. 278).

Es ist also dringend nötig, soll das Institut „Facharbeit“ nicht scheitern, Anleitung und Hilfen bezüglich Themenfindung, Begleitung und Bewertung zu geben und einen Erfahrungsaustausch anzuregen. Die im folgenden vorgestellten Beispiele und Vorschläge gehen von der Annahme aus, daß – zumindest zeitweise, nämlich während der Anfertigung der Facharbeit – ein Computeralgebra-System (z. B. Derive) oder ein Taschencomputer (etwa TI-92) eingesetzt wird.

1 Was sind und was sollen Facharbeiten?

Unter einer mathematischen **Facharbeit** ist die Dokumentation der Bearbeitung einer mathematischen Projektaufgabe zu verstehen. **Projektaufgaben** zielen über die gewohnten Problemlöse-Aufgaben des Mathematikunterrichts hinaus, indem sie den Lernenden mehr Freiraum für eigenes Denken und Handeln einräumen. Sie suchen die Idee zu realisieren, daß die Schüler nicht nur als Konsumenten vorgegebenen Wissens, sondern (teilweise) als Produzenten ihres Wissens und damit als für ihr eigenes Lernen (mit-) verantwortlich angesehen werden.

Die Erstellung einer mathematischen Facharbeit, erfordert zwei Fähigkeiten:
• Erstens die Fähigkeit, die Lösung einer komplexeren mathematischen Aufgabe eigenverantwortlich zu **planen** und **durchzuführen**.
• Zweitens die Fähigkeit, die Arbeitsergebnisse in geeigneter Form zu **dokumentieren**, d. h. in schriftlicher Form festzuhalten und damit anderen verständlich und nachvollziehbar zu machen.
• Ferner wird i. d. R. zusätzlich verlangt, die Facharbeit in einem Referat vor der Lerngruppe oder in einem Kolloquium vor Lehrpersonen zu **präsentieren**.

2 Themenfindung und Aufgabenformulierung

Die Kunst der Aufgabenformulierung besteht darin, einen *Mittelweg zwischen Offenheit und strikten Vorgaben* zu finden; dazu im folgenden drei Gegenbeispiele. In einer vom *Staatl. Seminar für Schulpädagogik Karlsruhe* im Internet publizierten Sammlung von Projektaufgaben (http://www.uni-karlsruhe.de/~za122/projekte) findet sich folgende Aufgabe:

Straße und Fluß

Der Verlauf einer Straße bezüglich eines bestimmten Flusses läßt sich in einem Koordinatensystem (Längeneinheit: 1 km) folgendermaßen beschreiben: Der Fluß genügt dem Term x^2, die Straße dem Polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Die Straße überquert den Fluß mit drei Brücken in $(-1 \mid 1)$, $(0 \mid 0)$ und $(1 \mid 1)$; im letzten Punkt sogar rechtwinklig. Bei $(1 \mid 2)$ befindet sich ein Rückhaltebecken; vor dort führt ein geradliniger Kanal auf dem kürzesten Weg zum Fluß. (1) Bestimmen Sie a, b, c und d. (2) Wie weit sind die Brücken voneinander entfernt (Luftlinie bzw. Wasserweg)? (3) Unter welchem Winkel kreuzen die anderen beiden Brücken den Fluß? (4) Wo mündet der Kanal vom Rückhaltebecken in den Fluß? (5) Von der bestehenden Straße aus soll ein möglichst kurzer Weg zum Rückhaltebecken gebaut werden. Wo auf der Straße soll er abzweigen? (6) Wo muß der Weg von Aufgabe (5) abzweigen, wenn er geradlinig verlaufen und nirgends über Wasser führen soll? (6) Das Land zwischen Fluß und Straße gehört im Bereich zwischen der ersten und der letzten Brücke einem Bauern. Wie groß ist diese Fläche?

Die Aufgabenstellung scheint mir insgesamt etwas zu kleinschrittig, d. h. sie ähnelt zu sehr den üblichen Klausuraufgaben. Ins andere Extrem fallen Steinberg und Ebenhöh (1998, S. 79):

Kurven in Parameterdarstellung

Stellen Sie an die durch $x(t) = -t + t^3$, $y(t) = -4t + t^4$ ($t \in \mathbf{R}$) beschriebene Kurve Fragen und versuchen Sie, diese Fragen selbst zu beantworten.

Abgesehen von der etwas merkwürdigen Vorstellung, daß die Schüler an eine Kurve Fragen stellen und dann nicht „die Kurve sprechen lassen“, sondern die Fragen „selbst beantworten“ sollen, ist eine solche Aufgabenstellung wohl etwas zu offen. Im vorliegenden Fall können die Schüler sich allerdings am vorangegangenen Unterricht orientieren, da Kurvendiskussionen dieser Art sicher vorgekommen sind. Schließlich sollte eine Aufgabe sich auch nicht zu sehr an Lehrbuchtexte anlehnen, so daß die Schüler im wesentlichen nur jenen Text reproduzieren und eventuell mit einigen Beispielen anreichern müssen, wie es in folgender Aufgabe (Grunert 1998) geschieht:

Die linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

(1) Erläutern Sie, was man unter einer Differentialgleichung und deren Lösung versteht, und gehen Sie auf die Schreibweisen ein. Geben Sie eine Übersicht über die Einteilung der Differentialgleichungen. Konzentrieren Sie sich dabei besonders auf die linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. (2) Entwickeln Sie aus der allgemeinen Form oder Normalform (...) die Sonderfälle ... (usw).

Facharbeits-Aufgaben sollten einen elementaren, eventuell durch Grafiken zu veranschaulichenden Einstieg erlauben, der jedem Schüler zugänglich ist, weil er an bekannte Inhalte und Methoden des Unterrichts anknüpft, und weil in der Aufgabenstellung vergleichsweise präzise Vorgaben gemacht werden. Dann aber müssen anspruchsvollere, insbesondere komplexere Fragestellungen folgen, die sich vom vorangegangenen Unterricht mehr und mehr lösen und von den Bearbeitern größere Selbständigkeit verlangen.

Ferner ist es nötig, die Schüler in die Methodik der Bearbeitung solcher Aufgaben, insbesondere deren Dokumentation, einzuführen. Es geht nicht an, von den Schülern, die jahrelang an einen häppchenweisen, rezeptorientierten Unterricht gewöhnt wurden, plötzlich zu verlangen, daß sie sich mit einer offenen Problemstellung selbständig auseinandersetzen. Es sollte ihnen ein Methodenreservoir zur Verfügung stehen, und sie sollten mit Strategien des selbständigen Arbeitens vertraut sein. Dies kann *nicht an einer einzigen Facharbeit* erworben werden. Bei pädagogisch sinnvollem Vorgehen müßte, vom Beginn der Oberstufe an, das Ende eines jeden Halbjahrs einer Facharbeit gewidmet sein. Zunächst wären die Anforderungen vergleichsweise bescheiden, später würde ein größerer Umfang und erhöhte Komplexität verlangt.

3 Aufbau und äußere Form der Facharbeit

Mathematik-Facharbeiten könnten wie folgt gegliedert sein:

(1) Ziel der Arbeit, (2) Durchführung, (3) Diskussion, (4) Anlagen, (5) Literatur.

(1) Im Gliederungspunkt *Ziel der Arbeit* wird das mathematische Problem dargestellt, dessen Lösung sich die Schüler zum Ziel gesetzt haben. Es dürfte sich dabei um eine Paraphrase der vom Lehrer gestellten Aufgabe handeln – in der Form, wie die Schüler sie sich zu eigen gemacht haben, eventuell mit einigen Erläuterungen.
(2) Im Punkt *Durchführung* stellen die Schüler ihre Lösung des Problems dar.
(3) Der Gliederungspunkt *Diskussion* dient vor allem der Rückschau und (selbstkritischen!) Reflexion des eigenen Vorgehens; ferner können weitergehende Überlegungen angestellt werden, die sich (z. B. aus Zeitgründen) nicht mehr realisieren ließen.
(4) In der *Anlage* können ggf. eingesetzte Hilfsprogramme, mit dem Computeralgebra-System erstellte Protokolle etc. wiedergegeben werden.

Um die Schüler auf das vorzubereiten, was von ihnen erwartet wird, sollte man ihnen an einem Muster zeigen, wie die Facharbeit etwa auszusehen hat. (Die folgende Aufgabe stützt sich auf Jacobs 1995).

Thema: Klassifikation von Parabeln nach der Gestalt

Unter den Parabeln (Graphen von Polynomfunktionen) gibt es die unterschiedlichsten Formen, deren Kompliziertheit im allgemeinen mit dem Grad des Polynoms wächst. Bezeichnen wir ein Extremum (Hoch- oder Tiefpunkt) mit dem Buchstaben **e**, einen Sattelpunkt mit **s** und einen Wendepunkt (der kein Sattelpunkt ist) mit **w**, so wird z. B. eine bestimmte S-förmige Parabel dritter Ordnung durch das Wort **ewe** (»Extremum–Wendepunkt–Extremum«) gekennzeichnet.

Dazu ein Beispiel: Wenn die Funktion g vom Typ **swe** ist und den fünf Bedingungen

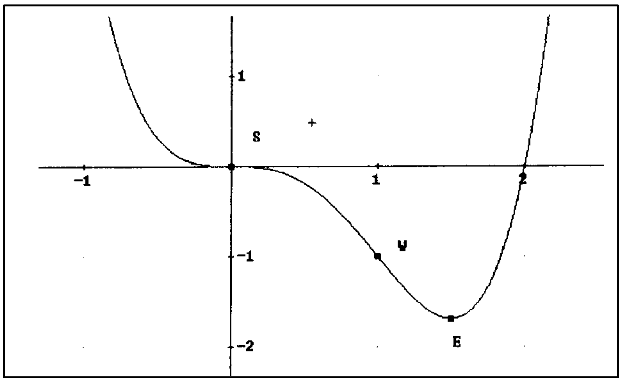
$$g(0) = 0,\ g(1) = -1,\ g(2) = 0,\ g'(1) = -2,\ g''(1) = 0$$

genügt, so definieren wir

```
Daten := [[0, 0, 0], [0, 1, -1], [0, 2, 0], [1, 1, -2], [2, 1, 0]].
```

Die erste Komponente eines Tripels ist die Ableitungsordnung, die zweite Komponente ist die Stelle der Ableitung, die dritte Komponente ist der Wert der Ableitung (dabei wird die Funktion selbst als »nullte Ableitung« betrachtet). Mit einem Derive-Programm (siehe Anlage 5.1) lassen sich die Daten auswerten; Aufruf *poly(Daten)*. Das Ergebnis lautet: $g(x) = x^4 - 2x^3$.

(Fig. 1)



Den Schülern wird dieser Sachverhalt ausführlich erläutert, dann erhalten sie folgende

Aufgabe: Es sollen die verschiedenen Parabeln dritter, vierter, fünfter, … Ordnung durch Wörter aus den Buchstaben e, s und w gekennzeichnet werden; vom Computer ist je eine typische Parabel zu zeichnen. Für einen selbstgewählten Typ (z. B. ewewe) ist eine vollständige Kurvendiskussion durchzuführen. Erwünscht sind auch Aussagen der Form: »Unter den Parabeln vierter Ordnung gibt es nur folgende Typen …« (als Behauptung mit Begründung oder Beweis).

Format der Facharbeit (Muster)

==

Birte Birzel	MATHEMATIK-FACHARBEIT	Celle, 12. 2. 1999
Leo Lingen	Jahrgangsstufe 12	

==

<u>KLASSIFIKATION VON PARABELN</u>

1 <u>Ziel der Arbeit</u>

Wir haben uns vorgenommen, die Parabeln dritter, vierter und fünfter Ordnung nach ihrer Form zu klassifizieren. Die Form (oder Gestalt) einer Parabel wird davon bestimmt, welche lokalen Extrema (Hoch- oder Tiefpunkte), Sattelpunkte oder Wendepunkte (die keine Sattelpunkte sind) sie besitzt. Auf die Lage der Kurve im Koordinatensystem und ihre genauen Proportionen kommt es dabei nicht an.

2 <u>Durchführung</u>

Wir bezeichnen ein Extremum mit dem Buchstaben **e**, einen Sattelpunkt mit **s** und einen Wendepunkt, der kein Sattelpunkt ist, mit **w**. Zur Ermittlung des Funktionsterms verwenden wir ein Derive-Hilfsprogramm, das uns vom Mathematiklehrer zur Verfügung gestellt wurde (siehe Anlage 4.1).

2.1 Parabeln dritter Ordnung

Bei Parabeln dritter Ordnung gibt es genau drei Typen, nämlich (1) den Typ **s**, (2) den Typ **w** und (3) den Typ **ewe**. Diese Tatsache ist aus dem Unterricht bekannt; wir gehen daher auf die Parabeln dritter Ordnung nicht weiter ein.

2.2 Parabeln vierter Ordnung

Unter den Parabeln vierter Ordnung haben wir fünf Typen gefunden, nämlich: (1) eww, (2) wwe, (3) ews, (4) swe, (5) ewewe.

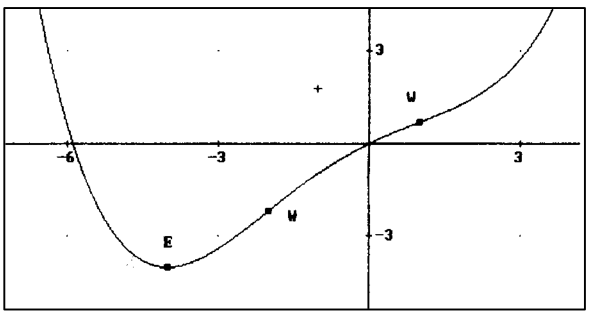
a) Die Typen **eww** und **wwe**

Da *wwe* zu *eww* offenbar achsensymmetrisch gewählt werden kann, betrachten wir nur einen der beiden Fälle, nämlich den Typ *eww*. Der Graph soll durch den Ursprung sowie den Punkt E = (– 4 | – 4) verlaufen, was die Bedingungen (1) g(0) = 0 und (2) g(– 4) = – 4 ergibt. Ferner sei E ein Extremum, was (3) g'(– 4) = 0 liefert. Die Wendestellen seien 1 und –2; damit bekommen wir die Bedingungen (4) g''(1) = 0 und (5) g''(–2) = 0. Diese fünf Bedingungen ergeben folgende Liste:

```
Daten := [[0, 0, 0], [0, -4, -4], [1, -4, 0], [2, 1, 0], [2, -2, 0]];
```

der Aufruf *poly(Daten)* liefert die Funktion

$g(x) = 0{,}0125x^4 + 0{,}025x^3 – 0{,}15x^2 + 0{,}8x$; ihr Schaubild sieht so aus:



(Fig. 2)

b) Die Typen **ews** und **swe**

Auch hier genügt es, nur einen Typ zu untersuchen; wir entscheiden uns für *ews*. (…)

c) Der Typ **ewewe**

(…)

2.3 Parabeln fünfter Ordnung

(…)

2.4 Kurvendiskussion

Die geforderte vollständige Kurvendiskussion nehmen wir an der Funktion g mit

$$g(x) = 0{,}6x^5 - 3{,}75x^4 + 6{,}1x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}8x$$

vom Typ *wwewe* vor. In Anlage 4.2 findet sich das zugehörige Derive-Protokoll.

3 Diskussion

Während der Arbeit ist uns aufgefallen, daß wir auch von den Ableitungen hätten ausgehen können, um dann zu den Stammfunktionen aufzusteigen. Diesen Gedanken konnten wir aus Zeitgründen nicht mehr durchführen.

4 Anlagen

4.1 Derive-Hilfsprogramm

```
wert(f, x, a) := lim(f, x, a)
h(n, x, k) := wert(vector(if(k = 0, u^i,
                          if(k = 1, i·u^(i-1),
                          if(k = 2, i·(i-1)·u^(i-2),?))),
                                              i, n, 0, -1), u, x)
mat(Daten) := vector(h(dimension(Daten) - 1, Daten↓i↓2, Daten↓i↓1),
                                                  i, 1, dimension(Daten))
koeff(Daten) := mat(Daten)^(-1)·element(Daten`, dimension(Daten`))
poly(Daten) := koeff(Daten)·h(dimension(Daten) - 1, x, 0)
```

4.2 Derive-Protokoll

```
#1: "Kurvendiskussion (Birte Birzel, Leo Lingen)"
#2: ""
#3: g(x) := 0.6·x^5 - 3.75·x^4 + 6.1·x^3 - 0.75·x^2 + 1.8·x
#4: …
```

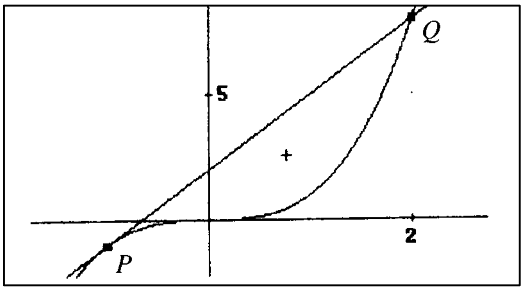
==================== Ende der Facharbeit (Muster) ======================

4 Vier Themenbeispiele

Als geeignet erweisen sich häufig Aufgaben, die in der Variation oder Verallgemeinerung bekannter, im Unterricht bereits behandelter Themen bestehen. Besonders reizvoll sind Aufgaben, die Anlaß zu einer (kleinen) mathematischen Entdeckung bieten.

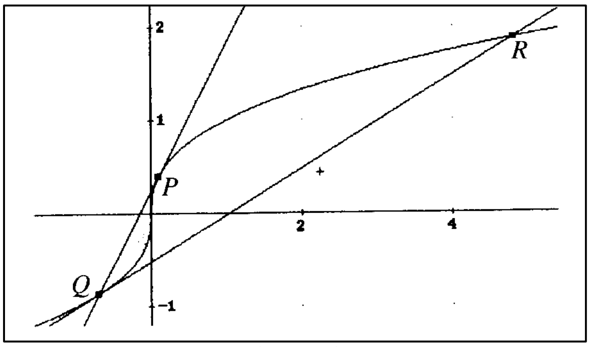
4.1 Sukzessive Tangenten

Die Tangente an den Graphen von $f(x) = x^3$ im Punkt $P = (a \mid a^3)$ schneidet die Kurve in genau einem Punkt Q und bestimmt eine Fläche F(P) zwischen Kurve und Strecke PQ.



(Fig. 3)

Wiederholen wir die Konstruktion, indem wir die Tangente in Q und ihren Schnittpunkt R mit der Kurve sowie die Fläche F(Q) zwischen Kurve und Strecke QR betrachten, so ergibt sich eine interessante Beziehung zwischen den beiden Flächeninhalten. (1) Entdecken Sie diese Beziehung, indem Sie z. B. von $P = (-1 \mid ?)$ ausgehen (Bild). (2) Führen Sie die Rechnung mit anderen Punkten P, Q, R durch und formulieren Sie eine allgemeine Behauptung bezüglich des Verhältnisses von F(Q) zu F(P). (3) Nehmen Sie nun anstelle von f eine beliebige ganzrationale Funktion dritten Grades und prüfen Sie, ob Ihre Behauptung (bzw. Vermutung) auch hier gilt. (4) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen auf Funktionen der Form $g_\alpha(x) = x^\alpha$ mit beliebigem reellem $\alpha \neq 1$ und $x \geq 0$, wobei Sie $g_\alpha(x) = -(-x)^\alpha$ für $x < 0$ setzen.



(Fig. 4)

Lösungshinweise: (1) Das Flächenverhältnis ist, unabhängig vom gewählten Anfangspunkt, konstant (= 16). (3) Dies gilt sogar für beliebige ganzrationale Funktionen dritten Grades (Beweis etwa durch geeignete Skalierung). (4) Für alle $a \neq 0$ schneidet die Tangente in $P = (a \mid g_\alpha(x))$ den Funktionsgraphen in genau einem weiteren Punkt mit der Abszisse $-n(\alpha) \cdot a$, wobei $n(\alpha)$ eine Nullstelle von $x \; \alpha \; x^\alpha - \alpha x - \alpha + 1$ ist; siehe Fig. 4 für $\alpha = 2/5$. Das Flächenverhältnis ist auch hier konstant ($= n(\alpha)^{\alpha+1}$); im obigen Fall $\alpha = 3$ haben wir $n(3) = 2$, Flächenverhältnis $2^4 = 16$ (Brown u. a. 1996).

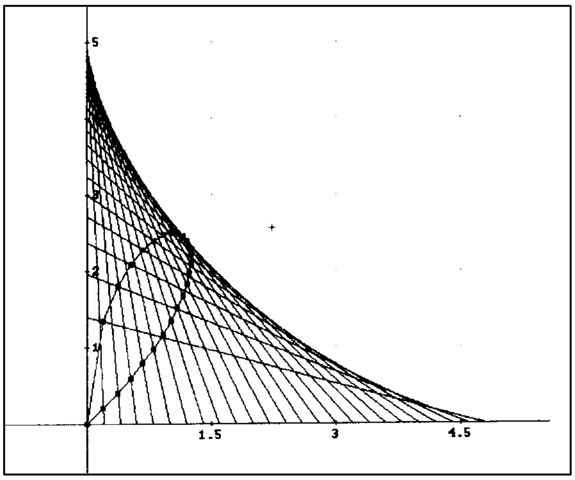
4.2 Grenzverhalten von g + g'

Gelte $g(x) \to c$ und $g'(x) \to c'$ für $x \to \infty$; wobei wir annehmen, daß der Grenzwert c bzw. c' entweder eine positive reelle Zahl (> 0), eine negative reelle Zahl (< 0), ferner 0, $+\infty$, $-\infty$ oder schließlich nicht-existent (?) sei. Es soll das Verhalten der Summenfunktion g + g' für alle 36 Paare (c, c') diskutiert werden. (1) Untersuchen Sie an geeigneten Beispielen zunächst die Fälle, daß $c' > 0$, $c' < 0$ oder $c' = \pm\infty$ ist, und zeigen Sie, daß hier $c = \pm\infty$ sein muß. (2) Untersuchen Sie nun den Fall $c' = 0$, etwa an Beispielen $g(x) \in \{\ln(x), 1 + 1/x, 1/x, -1 + 1/x, -\ln(x), \sin(\sqrt{x})\}$. Legen Sie eine Tabelle an, in die Sie Ihre Ergebnisse eintragen. (3) Fassen Sie die Ergebnisse in einem Satz zusammen, indem Sie folgende Aussage sinngemäß ergänzen: „Wenn $g(x) + g'(x) \to a$ für $x \to \infty$, dann ... ". (Beweisanleitung: Grenzverhalten von $e^x \cdot g(x) / e^x$ nach De l'Hospital, siehe Landau und Jones 1983).

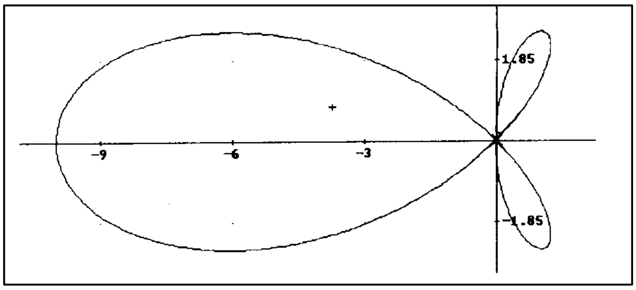
4.3 Gleitstrecke mit Gecko

An der Wand lehnt eine c = 5 [m] lange Leiter. Auf ihr sitzt Günter, der Gecko; unten steht Mathilde und zieht den Leiterfuß von der Wand weg, und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit u. Die Leiter, und mit ihr Günter, gleitet auf elliptischer Bahn abwärts (wie wir im Unterricht bewiesen haben). Nun wird Günter, der diesmal zu Beginn am Leiterfuß sitzt, ebenfalls aktiv und klettert mit der konstanten Geschwindigkeit v leiteraufwärts (d. h. in Richtung Leiterspitze). Auf welcher Kurve bewegt er sich, welches ist der höchste von ihm erreichte Punkt (wenn Mathilde wie bisher den Leiterfuß von der Wand wegzieht)? Was passiert, wenn Günter von der Spitze der Leiter an abwärts klettert? Betrachten Sie zunächst einen einfachen Spezialfall (z. B. u = v = 1 [m/s]) und stellen Sie die Leiterpositionen sowie Günters Bahn grafisch dar. Geben Sie die Kurven in Parameterdarstellung sowie als Koordinatengleichung an und diskutieren Sie letztere.

Lösungshinweise: Im genannten Spezialfall ist die Leiterposition zum Zeitpunkt t durch die Strecke PQ mit $P = (t \mid 0)$, $Q = (0 \mid \sqrt{(c^2 - t^2)})$ gegeben; die Parameterdarstellung der Geckoposition ist $x(t) = (1 - t/c) \cdot t$, $y(t) = t/c \cdot \sqrt{(c^2 - t^2)}$.



Parameterelimination zeigt: die Geckobahn liegt (im Fall c = 5) auf der Kurve mit der Koordinatengleichung $(x^2 + y^2)^2 + 10x(x^2 - y^2) = 0$ (Fig. 6). Es handelt sich um ein gerades Dreiblatt; vgl. Weth (1996).

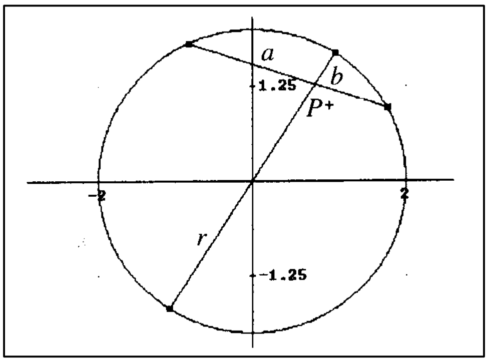


(Fig. 6)

4.4 Sehnen-erzeugte Fläche

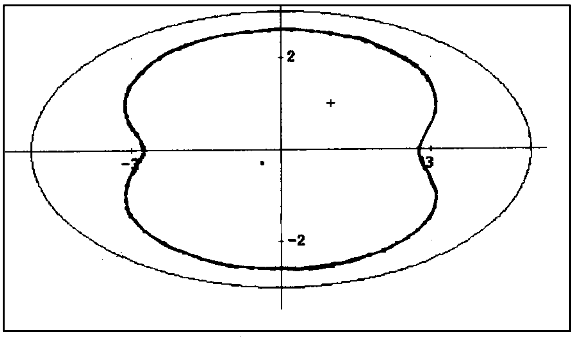
In einen Kreis vom Radius r sei eine Sehne eingezeichnet, die durch einen Punkt P in zwei Teilstrecken der Länge a bzw. b geteilt wird. Wenn die Sehne einmal im Kreis herumwandert, beschreibt der Teilpunkt P einen weiteren (inneren) Kreis. Welchen Inhalt hat die (Ring-) Fläche zwischen den beiden Kreisen? (1) Untersuchen Sie zunächst einen konkreten Fall (z. B. r = 5, a = 1, b = 3) und fertigen Sie eine Grafik an. (2) Ein von dem englischen Mathematiker Hammond Holditch im Jahr 1858 formulierter Satz lautet: „Wenn eine Sehne der konstanten Länge a + b in einer geschlossenen Kurve von einem Punkt P in zwei Strecken der Länge a, b geteilt wird, hat die Differenz der von der Kurve und der Ortslinie des Teilpunkts erzeugten Flächen den Inhalt πab." Bestätigen Sie den Satz am Beispiel einer Ellipse. (Die Ringfläche hat eine interessante Form; stellen Sie sie grafisch dar.) (3) Der Satz gilt nicht für jede Kurve bzw. Sehne, sondern nur in einem gewissen „Normalfall". Finden Sie Beispiele, wo er nicht gilt und zählen Sie die impliziten (d. h. die von Holditch nicht explizit ausgesprochenen) Voraussetzungen des Satzes auf.

Lösungshinweise: Da zwei Kreissehnen in Strecken der Längen a, b bzw. r + c, r – c geteilt werden (Fig. 7), gilt $ab = (r + c)(r - c) = r^2 - c^2$ (siehe z. B. Coxeter und Greitzer 1983, S. 32; auf diesen Satz könnte man die Schüler ggf. hinweisen). Es folgt $\pi ab = \pi r^2 - \pi c^2$, d. h. der Flächeninhalt des Kreisrings ist πab.



(Fig. 7)

Mittels Integralrechnung wird das gleiche Ergebnis im Fall der Ellipse (Fig. 8) bewiesen.



(Fig. 8)

Implizite Voraussetzungen: Die Kurve ist konvex; die Sehnen sind Tangenten, d. h. die innere Kurve ist Hüllkurve; die Sehne darf nicht zu lang sein und wandert nur einmal herum, die innere Kurve ist einfach zusammenhängend. Auf geeignete Gegenbeispiele können die Schüler hingewiesen werden (Broman 1981). Das Studium der Sehnen-Hüllkurven bietet weiteres interessantes Material zum Erkunden mathematischer Zusammenhänge.

5 Schlußbemerkungen

Die vorgestellten Aufgaben entstammen sämtlich innermathematischen Fragestellungen; wünschenswert wären auch außermathematische Themen. Letztere sind indes noch schwerer zu gewinnen und zu bearbeiten; sie sind von Natur aus offener und komplexer, weil der Prozeß der Mathematisierung weniger determiniert ist als der der Lösung eines innermathematischen Problems. Vielleicht können die hier mitgeteilten Beispiele eine Diskussion zum Thema „Facharbeit“ anregen und Anlaß zum Finden weiterer Aufgaben sein.

Literatur

Bade, R.: Die selbständige wissenschaftspropädeutische Arbeit (Facharbeit) in der gymnasialen Oberstufe und im Fachgymnasium. Hinweise und Empfehlungen für die Schulen.
In: Schulverwaltungsblatt für Niedersachsen 1998, H. 1, S. 22–29

Baumann, R.: Analysis 1. Ein Arbeitsbuch mit Derive. Stuttgart: Klett, 1998

Broman, A.: Holditch’s Theorem. A fresh look at a long-forgotten theorem.
In: Math. Magazine 54 (1981), H. 3, S. 99–108

Brown, H. I. u. a.: Functions whose successive tangent lines enclose proportional areas.
In: Amer. Math. Monthly 103 (1996), H. 11, S. 779–787

Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L.: Zeitlose Geometrie. Stuttgart: Klett, 1983

Grunert, L.: Eine Belegarbeit in den Leistungskursfächern Mathematik und Physik.
In: MiS 36 (1998), H. 5, S. 278–292

Henn, H.-W.: Realitätsnaher Mathematikunterricht mit Derive. Bonn: Dümmler, 1997

Herget, W.; Scholz, D.: Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung. Seelze: Kallmeyer, 1998

Jacobs, B.: Klassifizierung von Polynomen nach Art und Lage von stationären Punkten und Wendepunkten. In: PM 37 (1995), H. 2, S. 49–56

Krainer, K.: Was sind Projektaufgaben? In: Mathematik lehren 56 (1993), S. 67–70

Landau, M. D.; Jones, W. R.: A Hardy old problem.
In: Math. Magazine 56 (1983), H. 4, S. 230 –232

Rieder, W.: Aufgaben für Facharbeiten in Mathematik. In: MNU 45 (1992), H. 2, S. 105 –108

Steinberg, G.; Ebenhöh, M.: Ausgewählte Aufgaben zur Analysis. Hannover: Schroedel, 1998

Weth, Th.: Das gerade Dreiblatt. In: PM 38 (1996), H. 2, S. 54 – 56

Anschrift des Verfassers:

StD R. Baumann, Italienischer Garten 15, 29221 Celle
baumann-celle@t-online.de